Logica fuzzy, fundament al deliberării

de Ovidiu Turcoane

Parte a cercetării doctorale în domeniul *Democraţia digitală în societatea cunoaşterii*

Bucureşti, 2012

1. Introducere

Printre multe alte lucruri, lui Aristotel îi suntem datori pentru logica propoziţională pe care o folosim în ziua de azi. Totuşi, într-o lume în care definirea unor valori morale sau sociale nu mai are un caracter determinist, în care procesele economice şi fizice sunt modelate stocastic, logica bivalentă îşi dovedeşte limitele.

Încă din Evul Mediu, William of Occam (cca 1288 – cca 1348), care a folosit logica bivalentă, şi-a pus problema dacă *p* sau *q* (din afirmaţia „dacă *p* atunci *q*") nu sunt nici adevărate, nici false. La începutul secolului XX, Jan Lukasiewicz (1878 – 1956) a propus o logică trivalentă, un pionierat al logicii multivaloare, de tipul: „adevărat", „fals" şi „neutru".

Naşterea logicii fuzzy[1] apare ca o consecinţă pentru a crea un nou cadru de lucru pentru rezolvarea unor probleme diferite de cele ale teoriei probabilităţii: „un astfel de cadru oferă o modalitate naturală de a trata probleme cu un anume grad de imprecizie în absenţa criteriilor bine definite, pentru o clasă de apartenenţă mai degrabă decât pentru prezenţa unor variabile aleatoare" (Zadeh, 1965: pp 339). Revenind asupra suprapunerii dintre logicile fuzzy şi probabilităţile condiţionate, referindu-se la modele de vot şi consens, Zadeh preciza: „În fapt, teoria probabilităţii şi logicile fuzzy au agende de lucru diferite şi domenii distincte de aplicabilitate" (Zadeh, 1995: pp 1).

Aplicabilitatea logicii fuzzy este variată, câteva exemple fiind sugestive: domeniul structurat al cunoaşterii umane disponibil, procese cu modele matematice necunoscute sau imposibil de determinat, procese nelineare, în lipsa informaţiilor precise, în sisteme ierarhice de control de nivel înalt sau în procesul de luare a deciziei. Utilizarea logicii fuzzy cu rezultate concrete a început din anii 1975, odată cu primele demonstraţii teoretice şi practice în domenii neadiacente: control industrial sau creşterea plantelor (Mamdani, 1976: pp 2).

Necesitatea utilizării logicii fuzzy în procesul politic, deliberativ şi nu doar atât, se datorează faptului că pleacă de la premiza că percepţia umană este imprecisă. Referindu-se la consistenţa ei, Zadeh consideră:

Pa) Percepţiile sunt fuzzy pentru că valoarea variabilelor luate în considerare nu este conturată perfect

[1] fuzzy - neclar, care nu este definit riguros, precis

Pb) Percepţiile sunt granulare, în sensul că variabilele observate sunt grupate în granule, granula fiind o grămadă de puncte care au în comun caracterul confuz, similaritatea, proximitatea sau funcţiunea (Zadeh, 2002: pp 238).

Logica binară este una a concretului, a certitudinii, dar totodată prea categorică, în care lucrurile sunt fie albe fie negre. Democraţia participativ-deliberativă presupune o zonă gri, a căutării, a încercărilor multiple şi a incertitudinii, nefiind niciodată siguri de rezultat sau dacă acesta este întotdeauna cel mai bun. Dar, pe lângă rolul instrumentalist, susţinem că democraţia are şi un rol intrinsec, al exerciţiului democratic, iar logica fuzzy reprezintă o unealtă a fundamentării construcţiei unui model participativ, al pluralismului şi al incluziunii unor variabile care sunt vag definite.

2. Exemplu practic de comparaţie între logicile fuzzy şi binară

Pentru a înţelege mai bine scopul utilizării logicii fuzzy, înainte de a discuta pe scurt despre modelul logico-matematic al acesteia, vom lua un exemplu practic. Fie variabila lingvistică *înălţime*; se pune problema cum încadrăm valoarea acesteia făcând apel la cuvintele din vocabularul comun. În logica clasică binară, avem un anume prag prin care presupunem că pentru o valoare mai mare sau egală cu 1.85 m oamenii sunt consideraţi înalţi. În virtutea acestei afirmaţii, o persoană care are înălţimea de 1.84 m va fi considerată ca nefiind înaltă şi va intra în aceeaşi categorie cu o persoană care are înălţimea 1.65 m. Desigur că aceasta este o abordare categorică, care nu ţine cont de *Pa* şi *Pb,* dar, dacă s-ar face intuitiv apel la experienţa şi limbajul uman, cu siguranţă că mai degrabă l-am considera înalt, într-o măsură destul de ridicată, pe cel care are 1.84 m.

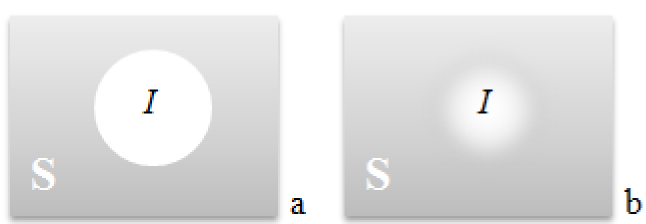

Figura 1. Diagramă Venn: a) clasic; b) fuzzy

În *Figura 2* **S** reprezintă setul/domeniul cunoaşterii, în cazul nostru toate clasele de înălţime, iar *I* reprezintă o anume parte din acest domeniu (un subset), clasa celor înalţi. În varianta *Figura*

2a **S** şi *I* sunt delimitate strict, dar în *Figura 2b* această delimitare nu mai este strictă existând o zonă fuzzy, care poate aparţine atât lui **S** cât şi lui *I*.

Dacă vom extinde, cum e şi normal, intervalul de definire a valorilor pe care termenul *înălţime* le ia, vom alege, să zicem, trei clase lingvistice: *scund*, *mediu* şi *înalt*. *Figura 3* şi *Figura 4* fac o comparaţie între abordarea logicii binare şi cea fuzzy. Valorile pe axa verticală reprezintă sub formă matematic – binară: „0” ca „fals” şi „1” ca adevărat. Pe axa orizontală sunt trecute valorile pe care înălţimea le poate lua, fiind exemplificat un interval care porneşte de la 1.55 m până la 2.00 m. Dacă s-ar fi luat în considerare o mai mare acurateţe, am fi putut defini mai mult de trei clase ale înălţimii, spre exemplu cinci: *foarte scund*, *scund*, *mediu*, *înalt* şi *foarte înalt*. Cu o şi mai mare precizie, am mai fi adăugat la începutul claselor clasa „pitic” şi la sfârşit clasa „gigant”. Pentru exemplificare, în acest caz, sunt suficiente cele trei clase: *scund*, *mediu* şi *înalt*.

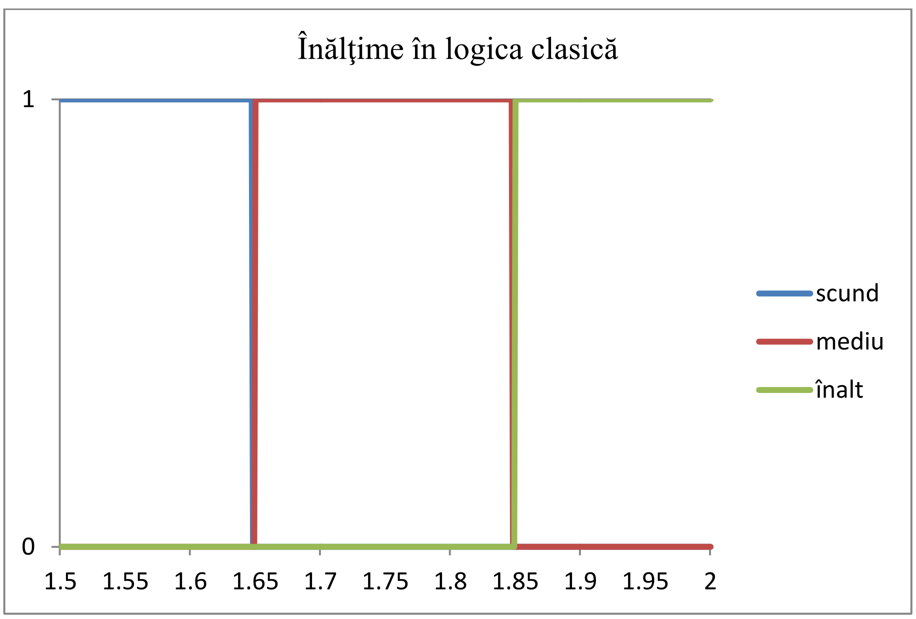

Figura 2. Clase de înălţime în logica binară

Într-o logică clasică, plecând de la o percepţie arbitrară, aleasă de autor, s-au stabilit următoarele: persoanele cu înălţime sub 1.65 m sunt considerate scunde, cele care au între 1.65 m şi 1.85 m sunt considerate medii de înălţime, iar cele cu peste 1.85 m înălţime sunt considerate înalte. Dacă privim *Figura 3*, se remarcă faptul că doar valorile de adevăr sau fals (0 sau 1 în acest caz), descriu perfect gradul de apartenenţă la clasa de înălţimi, astfel încât:

- Clasa *scund*: are valoarea logică 1 (adevărat) când înălţimea se regăseşte sub valoarea numerică de 1.65 m, iar în rest, peste sau egal cu valoarea numerică de 1.65 m, are valoarea logică 0 (fals)

- Clasa *mediu*: are valoarea logică 0 (fals) când înălţimea se află sub valoarea 1.65 m, are valoarea logică 1 (adevărat) când înălţimea se află deasupra sau egală lui 1.65 m dar sub valoarea numerică de 1.85 m, şi are valoarea logică 0 (fals) din nou când se află peste sau egal cu valoarea numerică de 1.85 m

- Clasa *înalt*: are valoarea logică 0 (fals) când înălţimea se află sub valoarea numerică de 1.85 m şi are valoarea logică 1 (adevărat) când înălţimea se află peste sau egală cu 1.85 m.

Raportându-ne la gradul de percepţie şi de înţelegere umane pare destul de inexact să afirmăm atât de categoric că o persoană de 1.86 m este înaltă, iar una de 1.84 m nu este. Poate că în privinţa înălţimii nici nu ne interesează prea mult cărei categorii aparţinem, dar dacă este cazul unui concept mai concret şi cu implicaţii mai substanţiale, cum ar fi cantitatea de apă pe care trebuie să o folosim la udarea florilor, atunci lucrurile sunt mai complicate. Dacă ne bazăm pe faptul că secetă este doar când nu plouă o lună de zile, indiferent de temperatură şi alte condiţii, şi aşteptăm liniştiţi 30 de zile fără să luăm măsuri, avem şansa să facem economie de apă şi pe viitor, pentru că nu mai avem ce să udăm. În general, trebuie luate mai multe variabile în calcul (zile secetoase, temperatură, umiditate etc.), iar logica fuzzy are instrumentele necesare pentru a găsi soluţia raportându-ne la mai multe variabile incerte.

Revenind la clasele care definesc *înălţimea* să remarcăm graficul din *Figura 4*, în care o primă observaţie este aceea că pe axa verticală avem valori intermediare între ceea ce în logica binară defineam cu 0 (fals) şi 1 (adevărat). Din raţiuni tehnice aceste valori intermediare au fost ataşate axei verticale folosind un pas de 0.1, dar trebuie precizat că ele pot lua orice valoare între 0 şi 1. Aşadar, în logicile fuzzy avem posibilitatea să precizăm despre valoarea numerică a înălţimii, cu un anume grad de încredere, cărei valori logice cuprinse între 0 (fals) şi 1 (adevărat) aparţine.

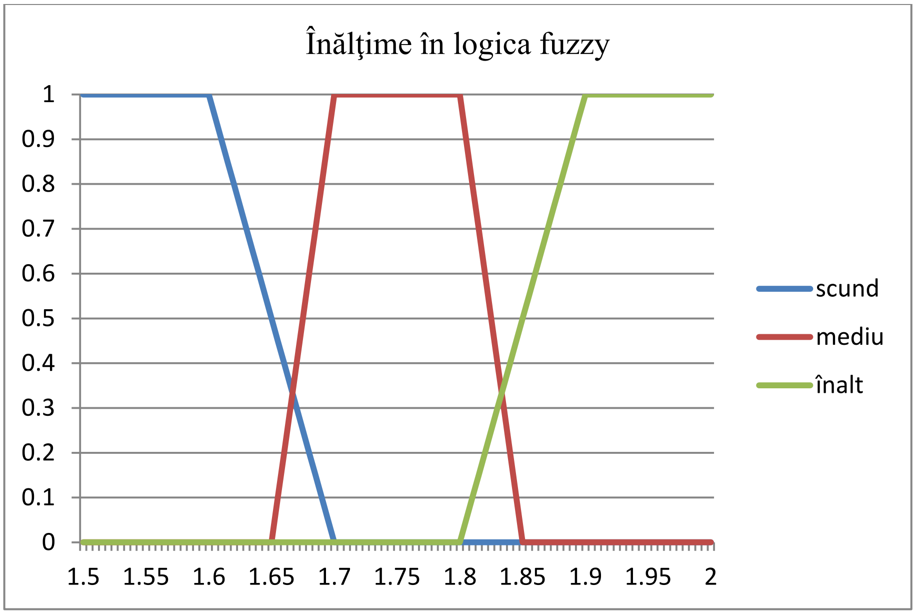

Figura 3. Clase de înălţime în logica fuzzy

Mai mult, observăm în *Figura 4* că cele trei clase de valori ale *înălţimii* se întrepătrund, în anumite situaţii, pentru că, conform percepţiei umane diferite de la om la om, există mai multe modalităţi de abordare când vine vorba de definirea unor praguri. Şi în cazul logicii fuzzy au fost stabilite arbitrar, pentru a servi exemplului, următoarele criterii de percepere a înălţimii:

- Clasa *scund*: cu un grad de încredere total (1 sau 100%), ce corespunde valorii logice adevărat, s-a ales ca valoarea numerică a înălţimii sub 1.65 m să fie considerată ca scundă. Gradul de încredere privind faptul că o persoană este scundă scade odată ce înălţimea depăşeşte 1.65 m. Când înălţimea ajunge la 1.7 m, persoana este considerată scundă cu un grad de încredere de 0 sau 0 %, adică fals în totalitate, precum în logica binară. Aşadar, între valoarea numerică a înălţimii de 1.65 m şi cea de 1.7 m, putem avea orice valoare logică cuprinsă între 1 şi 0, invers proporţional cu creşterea numerică a înălţimii. Dacă facem un exerciţiu de imaginaţie vizuală şi ducem o perpendiculară de pe axa orizontală din dreptul valorii numerice de 1.65 m, vom constata că intersectează graficul de culoare albastră al clasei *scund* undeva în jurul valorii logice de 0.5 (aceasta se datorează formei arbitrare a funcţiei care defineşte clasa *scund*). Nu este însă obligatoriu ca jumătăţii de interval numeric ce delimitează pierderea gradului de încredere să-i corespundă jumătatea de interval logic, adică 0.5 atunci când 0 reprezintă fals şi 1 reprezintă adevărat (se întâmplă mai ales pentru funcţii lineare, nu şi pentru cele nelineare).

- Clasa *mediu*: cu un grad de încredere total (1 sau 100%), ce corespunde valorii logice adevărat, s-a ales ca valoarea numerică a înălţimii cuprinsă în intervalul dintre 1.7 m şi 1.8 m să fie considerată ca medie. Gradul de încredere că persoana este de înălţime medie scade atunci când valoarea numerică a înălţimii scade sub 1.7 m sau când creşte peste 1.8 m. Când valoarea numerică scade sub 1.65 m sau creşte peste 1.85 m, gradul de încredere este 0 sau 0%, adică fals şi afirmăm că persoana nu are înălţime medie. Dacă facem acelaşi exerciţiu de imaginaţie vizuală şi ridicăm o perpendiculară pe axa orizontală din dreptul valorii numerice de 1.67 m vom intersecta graficul roşu al clasei mediu undeva în jurul valorii logice de 0.4, ceea ce înseamnă că pentru un grad de încredere de aproximativ 40% persoana este medie de înălţime la 1.67 m. Având în vedere că funcţia care construieşte graficul clasei *mediu* este simetrică, cum lesne se poate observa din *Figura 4* (bazându-ne pe puterea de percepţie a observatorului), pentru valoarea numerică de 1.83 m a înălţimii vom avea acelaşi grad de încrede de aproximativ 40% că persoana este medie de înălţime. Egalitatea aceasta se datorează faptului că s-au adunat 0.02 m la capătul inferior al intervalului şi s-au scăzut 0.02 m la capătul superior al intervalului cuprins între 1.65 m şi 1.85 m, cel care pentru un grad de încredere ce urcă de la 0 până la 1 şi apoi coboară iar la 0 determină limitele de înălţime pentru clasa *medie*.

- Clasa *înalt*: pentru orice înălţime peste 1.8 m putem afirma, cu diferite grade de încredere că persoana este înaltă. În intervalul valorii numerice a înălţimii cuprins între 1.8 m şi 1.9 m, avem un grad de încredere care creşte direct proporţional cu înălţimea, de la 0 la, respectiv, 1. Pentru valorile numerice ale înălţimii mai mari ca 1.9 m valoarea logică este 1, adică adevărat.

Cele trei clase se intersectează pentru anumite valori numerice ale înălţimii, astfel că, raportându-ne la *Figura 4*, putem înţelege mai bine fenomenul de neclaritate[2]:

- Clasa *scund* şi clasa *mediu* se intersectează între valorile 1.65 m şi 1.7 m, ceea ce înseamnă că nu putem spune cu siguranţă, ci cu anumite grade de încredere, căreia din clase aparţin valorile numerice cuprinse între 1.65 m şi 1.7 m.

- Clasa *mediu* şi clasa *înalt* se intersectează între valorile 1.8 m şi 1.85 m, de aceea o valoare numerică a înălţimii de 1.825 m are un grad de încredere cu o valoare logică de 0.5 că este de înălţime medie şi un alt grad de încredere cu o valoare logică de 0.25 că aparţine clasei *înalt* (pentru a percepe aceste valori trebuie făcut acelaşi exerciţiu de imaginaţie, ridicând o perpendiculară pe axa orizontală din *Figura 4*, care intersectează graficul roşu al clasei mediu şi, respectiv, graficul verde al clasei înalt).

[2] fuzziness

După acest preambul care s-a dorit o introducere cu valenţe practice în logica fuzzy, din perspectiva limbajului uzual, se va aborda în secţiunea următoarea o comparaţie între logicile clasice şi fuzzy folosind limbajul logico-matematic.

3. Scurtă introducere în seturi clasice şi fuzzy

După ce am apelat la vocabularul comun pentru a exemplifica logica binară şi pe cea fuzzy, este momentul utilizării elementelor de algebră pentru a defini aspecte teoretice care definesc cele două concepte. Logica fuzzy are un fundament matematic, care deja a fost demonstrat şi validat în mai multe ocazii (Metcalfe et al, 2009 şi Chen et al, 2001).

Fie **S** un set nevid, numit *set/mulţime universal(ă)* şi care conţine *elemente* posibile care aparţin domeniului de interes. Un *subset S* al lui **S** este o uniune (finită sau nu) de mai multe elemente, iar faptul că elementul *s* aparţine subsetului *S* se notează

$$s \in S$$

Faptul că elementul *s* nu aparţine subsetului *S* se notează

$$s \notin S$$

Dacă subsetul *S* aparţine strict setului **S**, aceasta însemnând că există cel puţin un element $s \in \mathbf{S}$ dar $s \notin S$, se notează

$$S \subset \mathbf{S}$$

În cazul în care subsetul *S* este inclus în setul **S** sau *S* este egal cu **S** se notează

$$S \subseteq \mathbf{S}$$

Dacă avem două subseturi *A* şi *B*, şi atât $A \subset B$ cât şi $B \subset A$ sunt adevărate, atunci se notează:

$$A = B$$

Un set sau subset vid se notează cu simbolul $\emptyset$.

Numărul elementelor unui set *A* constituie cardinalul acestei mulţimi = card(*A*).

Pentru a simplifica notaţia, valoarea logic-numerică 1 reprezintă valoarea logică „adevărat”, iar valoarea logic-numerică 0 reprezintă valoarea logică „fals”.

Funcţia caracteristică a unui subset clasic *A*, se notează cu ***X*** şi este dată de relaţia:

$$X_{\mathrm{A}}(\mathrm{a}) = \begin{cases} 1, \text{ dacă a} \in \mathrm{A} \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Pentru un subset fuzzy *B*, *funcţia caracteristică* este notată cu μ şi este dată de relaţia:

$$\mu_B(b) \in [0,1], \text{ dacă } b \in B$$

În *Tabelul 2* sunt prezentate relaţii[3] definite pe seturi clasice şi modul cum ele se aplică şi seturilor fuzzy:

Relaţii	**Logica clasică**	**Logica fuzzy**
diferenţă	$A - B = \{s\ /\ s \in A \text{ şi } s \notin B\}$	Da
complement	$\bar{A} = \mathbf{S} - A$	Parţial
uniune	$A \cup B = B \cup A = \{s\ /\ s \in A \text{ sau } s \in B\}$	Da
intersecţie	$A \cap B = B \cap A = \{s\ /\ s \in A \text{ şi } s \in B\}$	Da

Tabelul 1. Relaţii în seturi clasice şi fuzzy

Fie **F** o funcţie caracteristică şi *x* o variabilă arbitrară. Avem pentru orice tip de set:

$F_{A\cup B}(x) = \max\{F_A(x), F_B(x)\}$,	(RF 1)
$F_{A\cap B}(x) = \min\{F_A(x), F_B(x)\}$,	(RF 2)
$F_{\bar{A}}(x) = 1 - F_A(x)$	(RF 3)

Tabelul 2. Relaţii fuzzy RF

- pentru *a* şi *b* două variabile reale: *max(a,b)=a*, dacă *a>b*, altfel *max(a,b)=b*

- pentru *a* şi *b* două variabile reale: *min(a,b)=b*, dacă *a>b*, altfel *min(a,b)=a*

Revenind la seturile fuzzy, *în Figura 3* se observă că setul universal **S** este cel al *înălţimii*, iar cele trei clase: *scund*, *mediu* şi *înalt* constituie trei subseturi *A*, *B* şi, respectiv, *C*. O diferenţă remarcabilă între logicile clasice şi cele fuzzy este aceea că fiecare subset al unui set universal are ataşată o funcţie, numită funcţie asociată, membră sau de apartenenţă[4] şi care este modelată de o relaţie matematică (de obicei analitică). Vom exemplifica:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} \text{trapmf (x, [1.55, 1.55, 1.65, 1.75]), dacă } x \in A \\ \text{trapmf (x, [1.7, 1.75, 1.8, 1.85]), dacă } x \in B \\ \text{trapmf (x, [1.8, 1.9, 2, 2]), dacă } x \in C \end{cases}$$

[3] între seturi (mulţimi) vorbim despre relaţii, între variabile vorbim despre operaţii; aceste relaţii îşi păstrează proprietăţile atunci când se aplică variabilelor (trecere de la general la particular)

[4] membership function, în original

Funcţia *trapmf*[5] construieşte un trapez prin declararea unui vector de puncte x şi a încă patru parametri ai unui al doilea vector, care reprezintă colţurile trapezului. Vectorul x reprezintă întregul domeniu de valori numerice pe care îl poate lua un element $s \in \boldsymbol{S}$, unde **S** este setul universal al claselor (subseturi) de înălţimi (sau un subset al acestui set, dacă nu se lucrează pe întreg domeniul). În cazul de faţă, pentru simplificarea exemplului, **S** este mai degrabă un subset al întregului domeniu al termenului *înălţime*, pentru că luăm în calcul un interval cuprins între 1.55 m şi 2 m; şi nu luăm în calcul înălţimi de 0.4 m (cât ar avea cel mai scund om din lume) sau de 2.6 m (cât ar avea cel mai înalt om din lume). Parametrii 1 şi 4 din al doilea vector (1.7 şi 1.85 pentru $x \in B$) reprezintă puncte aflate pe axa orizontală atunci când axa verticală ia valoarea logică 0, adică gradul de încredere că $x \in B$ este 0%. Parametrii 2 şi 3 din al doilea vector (1.75 şi 1.8 pentru $x \in B$) reprezintă şi ei puncte pe axa orizontală, dar atunci când axa verticală ia valoarea logică 1, adică gradul de încredere că $x \in B$ este 100%. *Figura 5* prezintă subsetul *B*, definit de parametrii din al doilea vector, şi funcţia asociată, cu *x = 1.7:0.01:1.8*, adică *x = 1.701, 1.702, 1.703, … , 1.799, 1.8*:

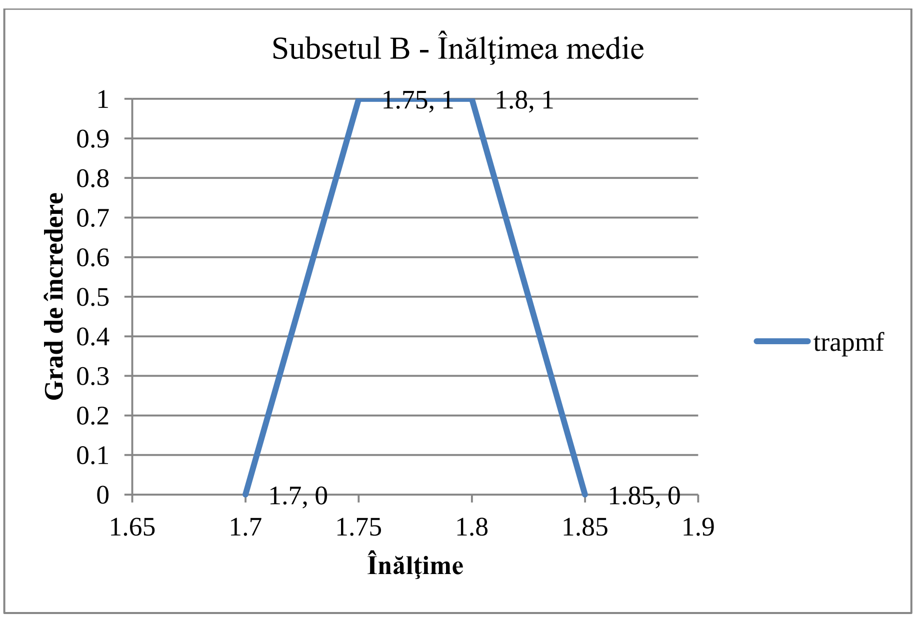

Figura 4. Clasa mediu şi funcţia asociată

Funcţiile asociate unui subset pot avea diferite forme, iar *Figura 6* prezintă câteva funcţii membre ale mediului *Matlab*, fiecare dintre funcţii având afişaţi parametrii de intrare:

[5] *trapmf* este pusă la dispoziţie de mediul Matlab şi generează puncte pe axa verticală în funcţie de vectorul *x*; *x* poate lua valori, de exemplu, de la 0 la 1, cu un pas de 0.1 sau, în cazul de faţă, de la 1.55 la 2 cu un pas de 0.001

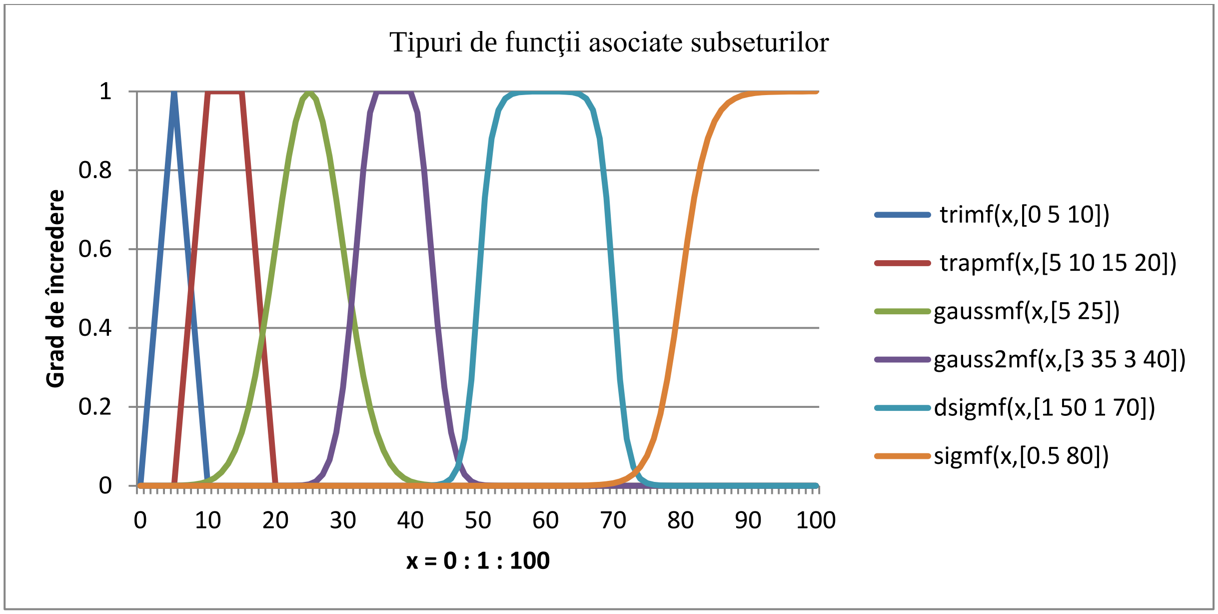

Figura 5. Tipuri de funcţii membre

În principiu, oricine îşi poate defini propriile tipuri de funcţii, dar acestea sunt importante în măsură în care nu complică prea mult problema pe care ne dorim să o rezolvăm, cel mai adesea ele fiind alese intuitiv, când nu există o funcţie matematică care să definească o variabilă într-un subset.

4. Sistemul logicii fuzzy (SLF)

Există mai multe variante ale unui sistem al logicii fuzzy, dar toate au o bază comună la care face apel şi algoritmul logicii fuzzy (ALF), inspirat din sistemul inferenţial propus de Matlab[6] (MathWorks, 2012), cu următorii paşi şi exemple:

ALF 1) Identificarea variabilelor: *înălţime, greutate* şi *înot*. Mai mult, vom folosi aceste variabile raportându-ne la un adolescent, nu la un adult, astfel ca exemplele să fie cât mai sugestive.

ALF 2) Definirea funcţiilor asociate seturilor: pentru *înălţime* vom folosi datele prezentate deja în secţiunea *3, Figura 4*. Pentru *greutate* vom defini arbitrar, în scop didactic, 2 clase de interes: *slab* şi *solid*. Fără a avea altă pretenţie în ceea ce priveşte acurateţea, ci doar pentru a servi exemplului, *Figura 7* detaliază funcţiile asociate subseturilor *slab* şi *solid*:

---

[6] se face referire la Matlab pentru că, pe parcursul acestei lucrări, va fi utilizat pachetul software pus la dispoziţie de către acest mediu de lucru: *Fuzzy Logic Toolbox*

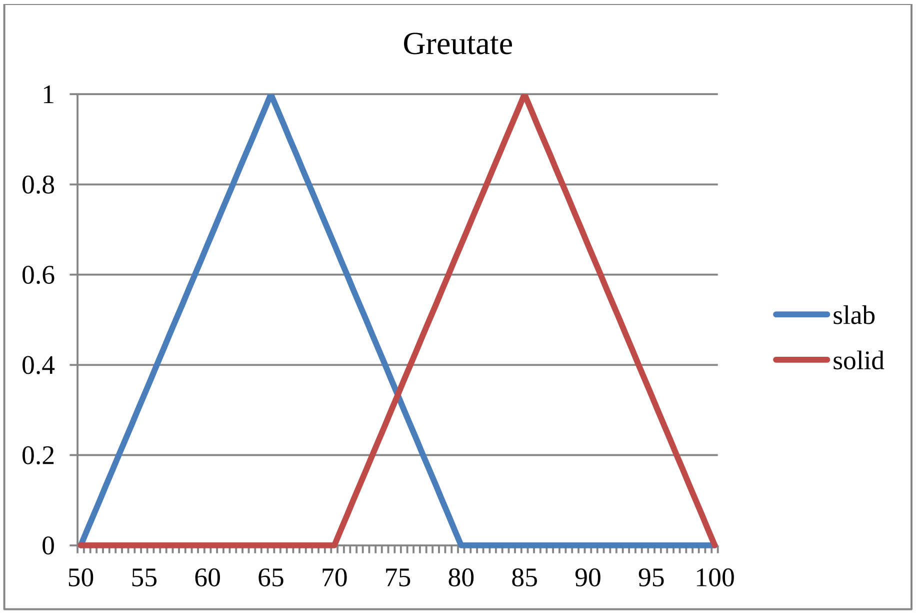

Figura 6. Greutate, funcţii membre

Avem două seturi de intrare *înălţime şi greutate*, pe care le vom nota ca *inputuri*. Acestea ne sunt de folos pentru a defini un set final: *înot*, notat *output*[7]. Pentru că înotul este un sport complex, care supune unui efort fizic toţi muşchii organismului (singurul, de altfel), acesta este extrem de util pentru o dezvoltare cât mai sănătoasă a unui adolescent. Setul *înot* interesează din perspectiva aflării efortului pe care un adolescent trebuie să-l depună în general, pe o scară de la 0 la 10. Acest efort poate fi exprimat în numărul de bazine (sau de sute de metri) pe care adolescentul trebuie să le parcurgă la o şedinţă de antrenament. Vom defini variabila *înot* prin funcţii asociate fiecărui subset K_i corespondent al subseturilor *inputurilor* $Q_{i,j}$, $i=1,n$ şi $j=1,m$, unde n este numărul de reguli şi m numărul de *inputuri, Figura 8*.

Odată cu alegerea reprezentării variabilei finale înot prin funcţii membre, înseamnă că SLF utilizat în această ocazie este unul de tip Mamdani, care pleacă de la premiza că outputul are o formă cunoscută doar la nivel intuitiv (Mamdani et al, 1975). Dacă am fi avut un output modelat de o funcţie cunoscută, ceea ce nu este cazul, am fi putut folosi un SLF de tip Sugeno, care cel mai adesea foloseşte funcţii polinomiale (Sugeno, 1985).

[7] input – intrare; output – ieşire, cuvinte provenite din engleză (DEX '98)

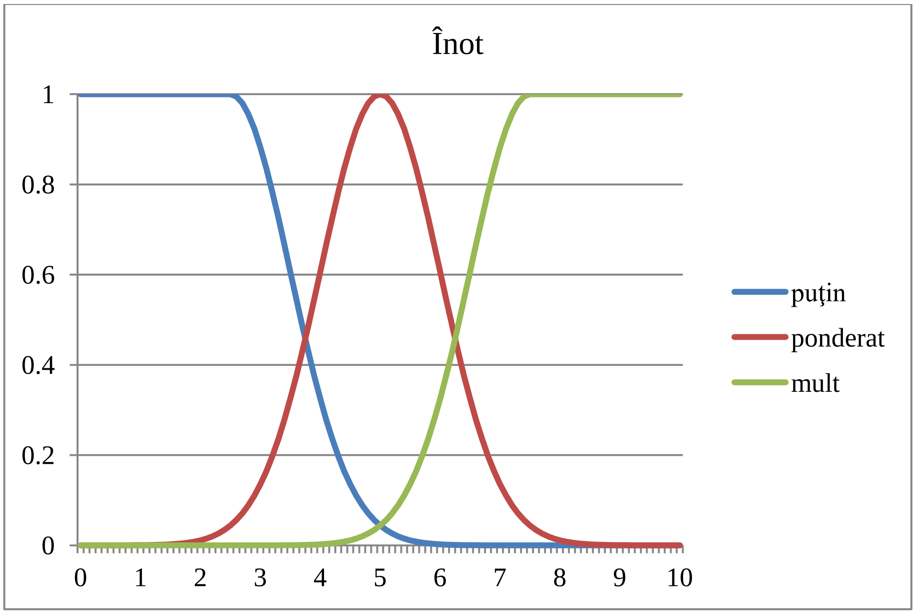

Figura 7. Efort depus la înot, funcţii membre

ALF 3) Construirea *regulilor dacă - atunci*[8]: aceste reguli sunt de tipul „ dacă Q_i atunci K_i”, unde Q_i este vector de *inputuri* şi K_i e *output*. Pentru exemplul nostru vom construi 4 reguli:

- RALF 1) Dacă *scund* **sau** *solid* atunci *mult* (Dacă adolescentul este scund sau solid, suficient una dintre ele, trebuie să înoate mult).

Această regulă mai poate fi scrisă şi sub forma:

- RALF 1’) Dacă *scund* **sau** **NU** *slab* atunci *mult* (Dacă adolescentul este scund sau <u>*nu*</u> este slab, suficient una dintre ele, trebuie să înoate mult)

- RALF 2) Dacă *mediu* **sau** *slab* atunci *ponderat* (Dacă adolescentul are înălţime medie sau este slab, suficient una dintre ele, trebuie să înoate ponderat)

- RALF 3) Dacă *înalt* **şi** *slab* atunci *puţin* (Dacă adolescentul este înalt şi slab, ambele în acelaşi timp, atunci trebuie să înoate puţin)

- RALF 4) Dacă *înalt* **şi** *solid* atunci *ponderat* (Dacă adolescentul este înalt şi solid, ambele în acelaşi timp, trebuie să înoate ponderat).

Observăm că variabilele sunt legate prin operatori logici, definiţi în (RF 1-3), similaritatea fiind următoarea:

sau – RF 1	**şi** – RF 2	**NU** – RF 3

Tabelul 3. Similaritate operatori şi relaţii fuzzy

[8] if-then rules

Pe de altă parte, *RALF 1* şi *RALF 2* au un caracter general, şi stabilesc un cadru larg pentru înălţimea scundă şi medie, dar şi pentru greutate (slabă şi solidă). *RALF 3* şi *RALF 4* reprezintă două cazuri particulare ale greutăţilor slabă şi, respectiv, solidă.

Desigur, fără a avea pretenţia unui specialist în dezvoltarea armonioasă a corpului, am încercat să ilustrez, pe baza experienţei şi percepţiei umane comune, modul în care un adolescent ar putea folosi înotul, fără a fi interesat de stabilirea unor performanţe sportive.

Odată cu primii trei paşi *ALF 1-3*, s-a trecut de faza de inițializare, următoarea etapă fiind cea a inferenţei, cea mai complicată, cu încă patru paşi:

ALF 4) Convertirea[9] datelor de intrare în valori fuzzy folosind funcţiile asociate: se va realiza atunci când o valoare numerică este aleasă pentru o variabilă. Vom explica vizual acest pas pentru *RALF1*, alegând valoarea de 1.75 (m) pentru *înălţime* şi de 75 (kg) pentru *greutate*.

- Se trasează câte o perpendiculară $l'_{1,j}$ pe axa orizontală până în punctul $I_{1,j}$ unde aceasta intersectează graficul funcţiei membre asociate fiecărui subset $Q_{1,j}$ definit în *ALF 3*. Se trasează o paralelă $l^*_{1,j}$ la axa orizontală prin punctul de intersecţie $I_{1,j}$, astfel încât se va delimita o suprafaţă $Q^*_{1,j}$ formată din axa orizontală, $l^*_{1,j}$ şi graficul funcţiei.

În *Figura 9*, l'_{11} are culoarea neagră şi nu intersectează graficul funcţiei asociate subsetului *scund* (sau putem spune că îl intersectează acolo unde valoarea ordonatei este 0).

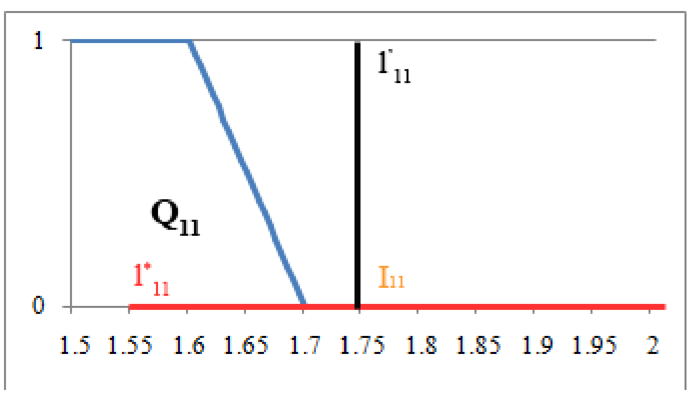

Figura 8. Convertire la valoare fuzzy pentru înălţime: $Q^*_{11} = \emptyset$

În *Figura 10*, l'_{12} are culoare neagră şi intersectează graficul în punctul I_{12}, iar l^*_{12} are culoare roşie. Suprafaţa delimitată Q^*_{12}, are culoarea verde transparent.

[9] fuzzification

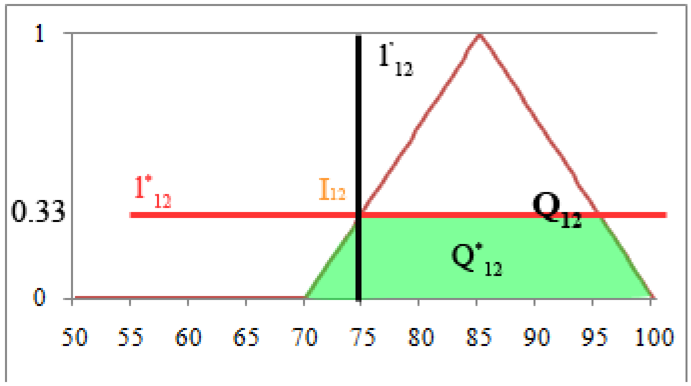

Figura 9. Convertire la valoare fuzzy pentru *RALF* 1, greutate, subsetul 2: Q^*_{12}

ALF 5) Evaluarea fiecărei reguli fuzzy cu sistemul de inferenţă: se aplică operatorul de conectare logic, prin aplicarea uneia dintre *RF 1-3* corespunzătoare fiecărei reguli definite în *ALF 3* şi se obţine câte un rezultat f_i, $\boldsymbol{V_j}$ fiind operatorul de conectare al regulii j:

$$f_i=F\left(\bigvee_{j}^{m} Q_{i,j}\right)=\bigvee_{j}^{m} F(Q_{i,j})$$

Vizual, fiecare din rezultatul f_i va fi folosit pentru a stabili ordonata unei paralele p_i la axa orizontală a fiecărui subset K_i al *outputului*. Suprafaţa A_i delimitată de p_i, axa orizontală şi graficul funcţiei asociate lui $Q_{i,j}$ constituie rezultatul. În cazul de faţă vor exista patru astfel de rezultate în această etapă, câte unul pentru fiecare dintre *RALF 1-4*.

Pentru *RALF 1* operatorul de conectare este **sau**, respectiv *RF 1*, ceea ce înseamnă că se va aplica funcţia *max*, astfel:

$$f_1=F_{scund\cup solid}=\max\{F_{scund}(1.75),F_{solid}(75)\}=\max\{0,0.33\}=0.33$$

În acest fel calculăm şi care sunt coordonatele punctului de intersecţie, adică:

$$I_{12}\,(75,0.33) = I_{12}\,(75, F_{solid}(75))$$

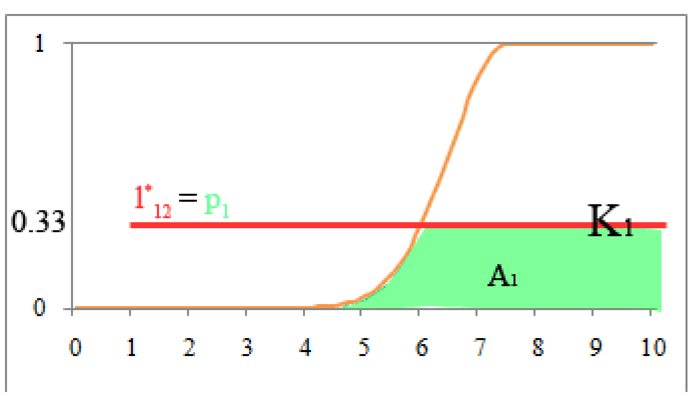

Figura 10. Rezultatul pentru RALF 1: $\boldsymbol{A_1 \subset K_1}$

Cunoscând ordonata lui I_{12}, adică f_1, vom evalua regula prin determinarea *outputului* în cazul *RALF 1*, aşa cum reiese din *Figura 11*.

ALF 6) Combinarea rezultatelor din fiecare regulă: după obţinerea rezultatelor de la pasul *ALF 5*, acestea sunt reunite printr-un operator logic (de obicei *max*) sau matematic, astfel încât, vizual, din suprafeţele obţinute pentru fiecare subset al *outputului* se va obţine o suprafaţă finală.

În Figura 12 sunt prezentate toate cele patru combinări ale subseturilor variabilelor înălţime şi greutate, rezultând subseturile variabilei înot ale RALF 1-4:

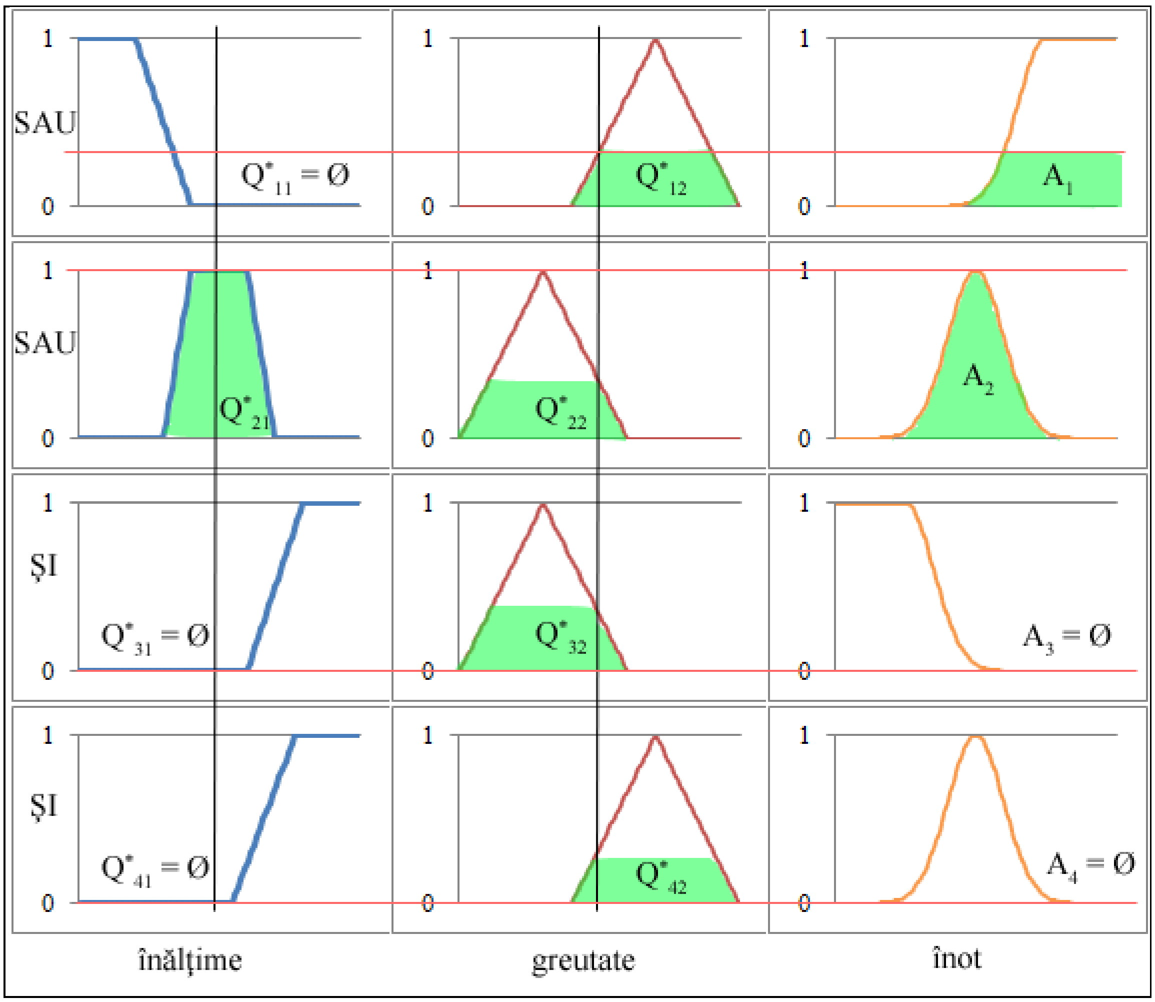

Figura 11. Combinarea prin reguli a subseturilor fuzzy în outputuri fuzzy

Reluând cele 4 reguli, vom exemplifica pentru fiecare în parte:

$$f_1 = F_{scundUsolid} = \max\{F_{scund}(1.75), F_{solid}(75)\} = \max\{0, 0.33\} = 0.33$$

$$f_2 = F_{mediuUslab} = \max\{F_{mediu}(1.75), F_{slab}(75)\} = \max\{1, 0.33\} = 1$$

$$f_3 = F_{\hat{\text{i}}\text{nalt}\cap \text{slab}} = \min\{F_{\hat{\text{i}}\text{nalt}}(1.75), F_{\text{slab}}(75)\} = \min\{0, 0.33\} = 0$$

$$f_4 = F_{\hat{\text{i}}\text{nalt}\cap \text{solid}} = \min\{F_{\hat{\text{i}}\text{nalt}}(1.75), F_{\text{solid}}(75)\} = \min\{0, 0.33\} = 0$$

Rezultă din valorile lui f_i , $i=1,4$, că fiecare arie rezultată A_i a subseturilor *outputului* va avea din suprafeţele iniţiale totale K_i următoarele procente:

$A_1 = 33\%\ K_1$	$A_2 = 100\%\ K_2$	$A_3 = 0\%\ K_3$	$A_4 = 0\%\ K_4$

Tabelul 4. Raportul dintre aria rezultată A şi cea iniţială K

ALF 7) Convertirea rezultatului fuzzy la o valoare numerică reală[10]: din rezultatele obţinute în pasul *ALF 6* se obţine un rezultat agregat *A* al rezultatelor A_i, $i=1,n$, unde *n* reprezintă numărul de reguli (*n* = 4 în exemplificare):

$$A = \bigcup_{i}^{n} A_i$$

Rezultatul *A* va fi supus unei operaţii de convertire din arie în valoarea numerică reală. Metoda folosită cel mai adesea este cea a *centroidului* (Sivanandam, 2007: pp98), care înseamnă găsirea valorii numerice *z* prin care perpendiculara dusă prin ea pe axa orizontală să împartă suprafaţa *A* în două părţi egale. Pentru *h1* limita inferioară şi *h2* limită superioară a intervalului numeric pe care *A* este definit, matematic, valoarea numerică *z* se calculează astfel:

$$z = \frac{\int_{h1}^{h2} \mu_A(x)x\,dx}{\int_{h1}^{h2} \mu_A(x)\,dx}$$

Dat fiind faptul că integrală se rezolvă numeric în mediul digital, se preferă din start o formulă de aflare a lui *z* care foloseşte un număr suficient de mare *h* de valori aflate în intervalul [*h1*, *h2*]:

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{h} \mu_A(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{h} \mu_A(x_i)}$$

Din punct de vedere vizual, *Figura 13* exemplifică obţinerea lui *A*, după cum reiese intuitiv şi din *Figura 12*, unde se pot observa aliniate vertical A_i, $i=1,4$:

[10] defuzzification

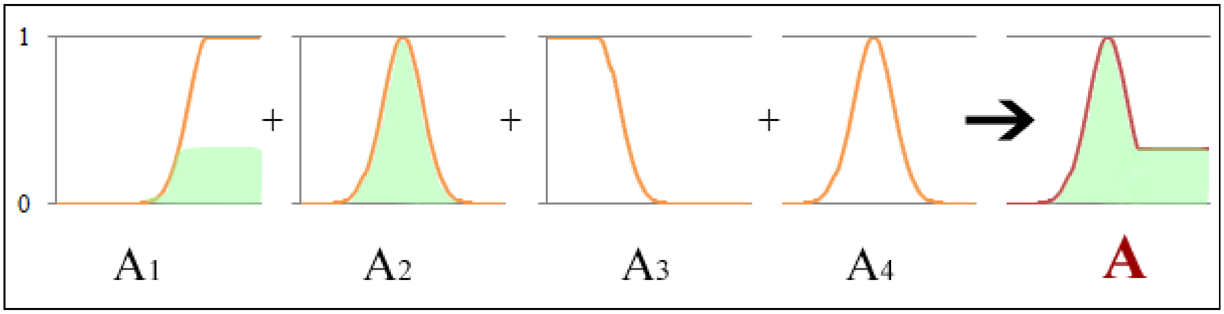

Figura 12. Reunirea seturilor intermediare A_i în cel final A

$$A=\bigcup_{i}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Ultima parte a algoritmului *SLF* dezvăluie rezultatul numeric final, obţinut prin metoda centroidului, *Figura 14*:

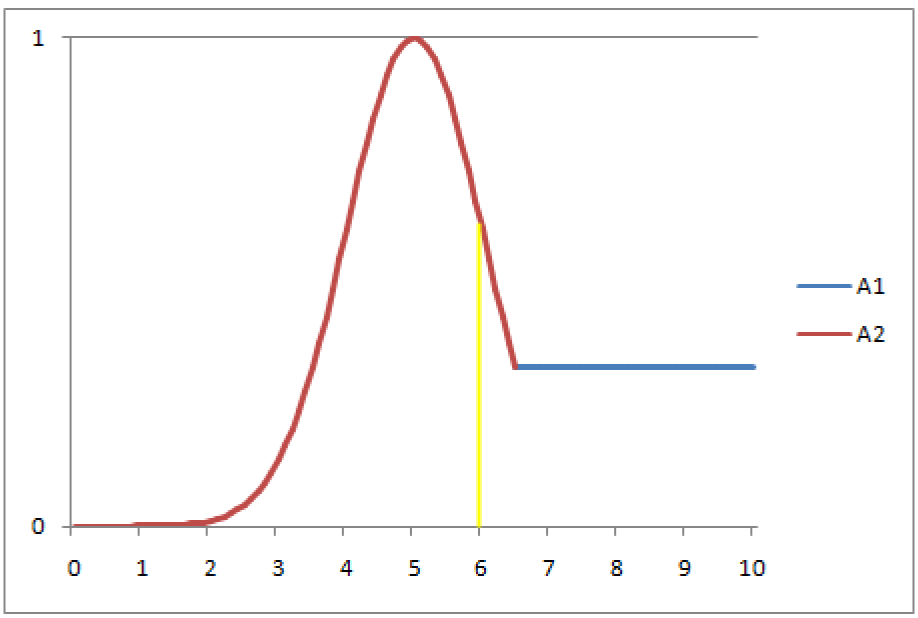

Figura 13. Rezultatul final obţinut prin metoda centroid asupra lui *A*

Pentru un vector *x=0:0.1:10*, adică *x = 0.1, 0.2, … ,10*, rezultatul este:

$$z^{*}=\frac{\sum_{i=0}^{100}\mu_A(x_i)x_i}{\sum_{i=0}^{100}\mu_A(x_i)}=0.6$$

Interpretarea lui z^{*} = 0.6 este aceea că un adolescent cu înălţime de 1.75 şi greutate de 75 de kg ar trebuie să înoate 6 bazine într-o sesiune de antrenament.